فصل اول:

اصول ایستایی

الف) مکانیک:علمی را گویند که اجسام را در وضعیتهای سکون ویاحرکت تحت تاثیرنیروهای وارده بررسی وتحلیل نماید.

علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم میشود:

1. مکانیک اجسام صلب(جامد):

الف)ایستایی(استاتیک):اجسام ساکن مورد بررسی قرار می گیرد.

ب)پویائی(دینامیک):اجسام متحرک مورد بررسی قرار می گیرد.

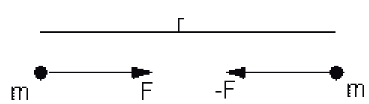
2. مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر
3. مکانیک شاره ها(سیالات)

ب)مفاهیم پایه:

مفاهیم بنیادی که درمکانیک به کاربرده می شوندعبارتنداز:

1. فضا:مکان هندسی نقاطی است که درآن میدان سه بعدی برای نقاط به کاربرده می شود.
2. زمان:علاوه برمکان یک جسم وقوع یک جسم نیزموردنظراست که واحدآن ثانیه است.
3. شبکه مرجع:موقعیت نقاط درفضانسبت به یک دستگاه هندسی مرجع وبافواصل وزوایا مشخص می شود.

4. نیرو:تاثیریک جسم روی یک جسم دیگررانیروگویند.نیروبانقطه اثربزرگی وجهت ها مشخص می شود.



ماده:ماده عبارت است ازجسمی است که فضاگیرباشد.یک جسم ماده ای توسط یک سطح بسته محصورشده است.

6. ماند(لختی):خاصیتی ازماده است که تمایل دارددربرابرتغییردرحرکت ایجادمقاومت نماید.
7. جرم:معیاری کمی ازماند(یالختی)است.جرم همچنین خاصیتی ازهرجسم است که همواره باجاذبه متقابل آن جسم نسبت به اجسام دیگرهمراه است.
8. جسم صلب:جسمی است که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجودنباشد.

ج)کمیت های عددی وبرداری:

کمیت های که دراستاتیک بکارمی آیدبردونوعند:

1. کمیت های عددی 2. کمیت های برداری

-کمیت های عددی آنهایی هستندکه فقط مقداردارند.مانند:زمان.جرم و......

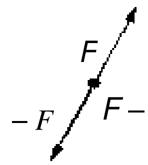
-کمیت های برداری علاوه برمقداردارای امتدادنیزمی باشند.مانند:نیرو

قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

همانطوری که گفته شده درصورتی که به یک ذره دونیروتاثیرکندباتوجه به اینکه نیروها بردارباشندمی بایستی ازقانون جمع متوازی الاضلاع برداری یک نیروبه نام برآیندقرارداد که ازرسم قطرمتوازی الاضلاع بدست می آیدکه دربخشهای بعدبه تفصیل ذکرخواهدشد.

اصل قابلیت انتقال:

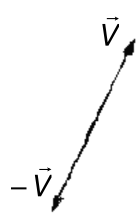
اگرنیرویی داردبرنقطه معمولی ازیک جسم صلب رابوسیله نیروی دیگری که اولی ازلحاظ مقداروجهت برابرولی نقطه اثرآن متفاوت است جایگزین کنیم وضعیت تعادل یاحرکت جسم تغییرنمی کند.



$F - F = 0$

نحوه نمایش یک کمیت برداری:

یک کمیت برداری v توسط یک پاره خط که دارای راستای برداربوده وبوسیله یک علامت پیکان جهت آن مشخص می شودنشان داده می شود.



بردار V = $\underline{V}$ و $\vec{V}$

اندازه V = $|V|$

د)قوانین نیوتن:

1. **قانون اول:** هرگاه برآیندنیروهای واردبریک ذره صفرشودذره اگردرحال سکون باشدساکن می ماندواگر درحال حرکت باشدبه حرکت خودادامه می دهد.
2. **قانون دوم:** شتاب یک ذره متناسب بابرآیندنیروهائی است که به آن واردمی گردند.

$$F = ma$$

F: برآیندنیروها　　m : جرم ذره　　a: شتاب ذره

3. **قانون سوم:**

نیروهای عمل وعکس العمل میان دوجسم ازنظرمقداربرابرندودرخلاف جهت یکدیگر عمل می نمایندودرروی یک راستاواقع می باشد.

طبق قانون گرانش نیوتن که می گویددوذره به جرم های M وM یکدیگر رابانیروهای مساوی ومختلف الجهت (F و -F)جذب می کنندبزرگی این نیرو(F)ازفرمول زیربدست می آیدکه درآن R فاصله بین دوذره و g ثابت عمومی که ثابت گرانش است.

$$F = G.\frac{MM}{R^2}$$

نتیجتا مقدار(W) وزن یک ذره به جرم M رامی شودبه صورت زیربیان کرد:

$$W = M.G \qquad G = 9.81 \quad M/S^2$$

سیستم های یکاها:

سیستم بین المللی یکاها(یکاهایSI)

درطی سالهای اخیرتقریبا کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحادیابه زبان فرانسه (SYSTEME INTERNATIONAL DUNITES) که مخفف آنSI می باشد رابرای تمامی کارهای مهندسی وعلوم انتخاب کردند.دراین سیستم یکاهای اصلی،یکاهای طول،جرم وزمان هستندکه آنهارابه ترتیب متر(M)وکیلوگرم(KG)وثانیه(S)می نامند. یکای نیرودراین سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن(N) می گویندوبنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به جرم یک کیلوگرمی شتابی برابربا $1\ M/S^2$ بدهد.

$$1N = (1KG)(1M/S^2)= 1KG.M/S^2$$

پیشوندواحدها:

نماد	پیشوند	مضرب(مقدار)
G	گیگا	$1000000000 = 10^9$
M	مگا	$1000000 = 10^6$
K	کیلو	$1000 = 10^3$
M	میلی	$0.001 = 10^{-3}$
µ	میکرو	$0.000001 = 10^{-6}$
N	نانو	$0.000000001 = 10^{-9}$

1MG = 1000KG   1MM = 0.001M   1KM = 1000M

1KN = 1000N   1G = 0.001KG

3.82 kn = $3.82*10^3$ mm   47.2 mm = 0.0472 m   3.82 km = 3820 m

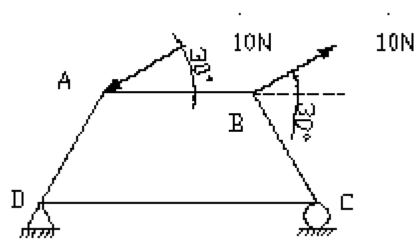
47.2 mm = $47.2 * 10^{-3}$ mm

فصل دوم:

استاتیک ذره ها:

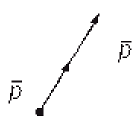
نیروهای واقع درصفحه:

نیرونماینده کنش یک جسم برروی یک جسم دیگراست وبه طورکلی بانقطه اثر،بزرگی اوراستایش مشخص می شود.

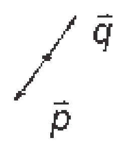


جمع بردارها:

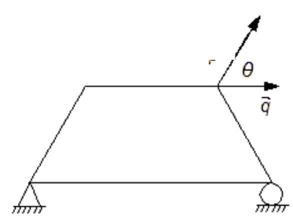
$$\vec{R}=\vec{p}-\vec{p}=0$$

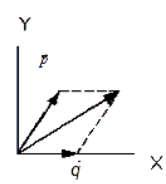


$$\vec{R}=\vec{p}+\vec{q}$$

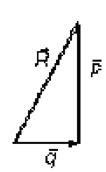


قانون متوازی الاضلاع:

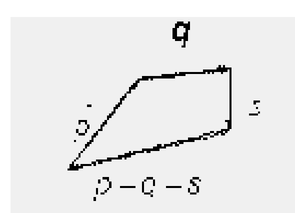




برداربرآیندبارسم بردارها $\vec{R}=\vec{p}+\vec{q}$ به شیوه سربه دم وبعداتصال دم بردارP به سربردار Q بدست می آید.



حالاجمع بیش ازسه برداررادرنظرمی گیریم.



خاصیت شرکت پذیری بردارها:
$$p+q+s=(p+q)+s=p+(q+s)$$

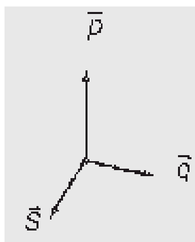
باتوجه به جمع بردارهای صفحه قبل نتیجه می گیریم:

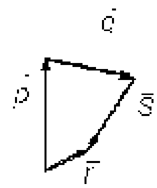
1. جمع بردارهادارای خاصیت جابجایی است.
2. جمع بردارهادارای خاصیت شرکت پذیری است.

ضرب اسکالردریک بردار:

$$p+p=2p \Rightarrow p_1+p_2+......+p_n=np$$
$$p_1=p_2=....=p_n$$

برآیند چندنیروی هم راس:

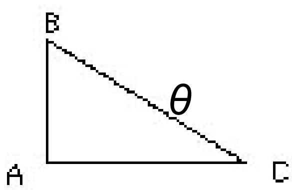




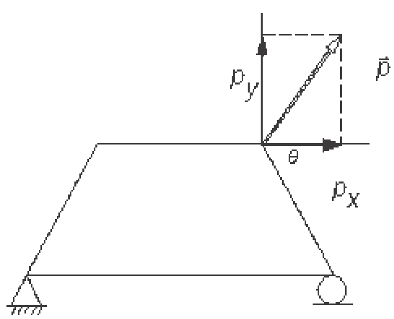
تجزیه یک نیروبه مولفه های آن:

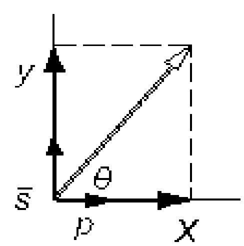
$$BC=\sqrt{AB^2+BC^2}$$

$$\cos\theta=\frac{AC}{BC}$$
$$\sin\theta=\frac{AB}{BC}$$
$$\tan\theta=\frac{AB}{AC}$$



$$p_y=p\sin\theta$$

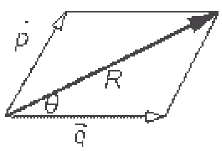




درامتدادمحورxهاوyهای مثبت دوبرداریکه اختیارمی کنیم به این بردارهابرداریکه می گویندوآنهارابه ترتیب برروی محورهایxوyباiوjنشان می دهند.باتوجه به ضرب یک اسکالردربردارخواهیم داشت مولفه های قائم P_y, P_x یک نیروی pرامی شودازطریق ضرب بردارهای iو j دراسکالرهای مناسب بدست آورد.

$$p_x=p_x.i,\ p_y=p_y.j,\ p=p_x.i+p_y.j$$
$$p_x=p\cos\theta,\ p_y=p\sin\theta$$

قانون متوازی الاضلاع:



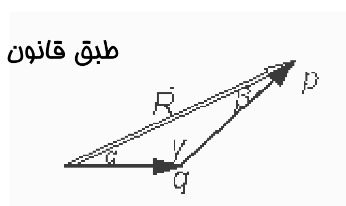
$$\vec{p}=p_x.i+p_y.j$$
$$\vec{q}=q_x.i+q_y.j$$
$$\Rightarrow \vec{R}+\vec{q}=(p_x.i+p_y.j)+(q_x.i+q_y.j)$$

$$r_x=\Sigma f_x, r_y=\Sigma f_y \qquad \vec{R}=(p_x+q_x)i+(p_y+q_y)j$$

یاباستفاده ازحل مثلثاتی خواهیم داشت:

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$$

طبق قانون سینوسها:



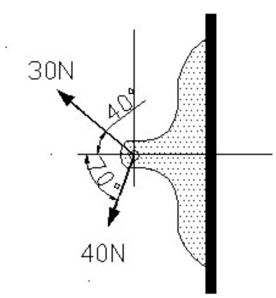
$$\frac{R}{\sin\gamma}=\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}$$

مثال 1:

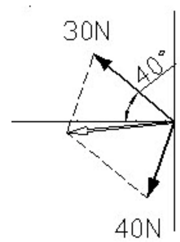
مطلوبست برآیندونیروی40N,30N واردبرشکل زیرراباستفاده از: الف)قانون متوازی الاضلاع   ب)قانون مثلث

د)جمع برداری

الف)



$$R^2=30^2+40^2+2\times30\times40Cos110$$
$$R=41N$$



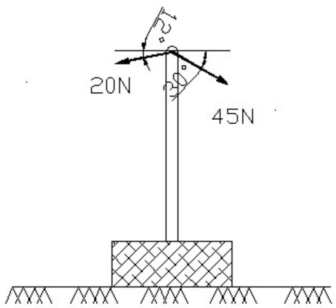
د)

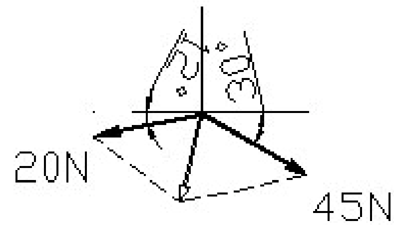
$$\vec{p}=-30\cos40i+30\sin40j=-22.98i+19.28j$$
$$\vec{Q}=-40\cos70i-40\sin70j=-13.68i-37.59j$$

$$\vec{R}=\vec{p}+\vec{q}=(-22.98-13.68)i+(19.28-37.59)j$$
$$\vec{R}=-36.66i+18.31j, r=\sqrt{36.66^2+18.31^2}\approx41n$$

مثال 2:

دکل AB توسط دونیروی منظورشده درنقطه A تحت فشارمی باشد.مطلوبست تعیین برآیند وجهت آن ناشی ازاین دونیرودرنقطه A را.





$$R_x = \Sigma F_x = 45\cos 30 i - 20\cos 12 i = 38.97 i - 19.56 i = 19.41 i$$

$$R_y = \Sigma F_y = -45\sin 30 j - 20\sin 12 j = -22.5 j - 4.16 j = -26.66 j$$

$$R = 1\sqrt{9.4^2 + 26.66^2} = 32.97$$

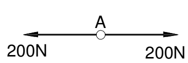
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{19.4}{26.66}\right) = 36.04^{\cdot}$$

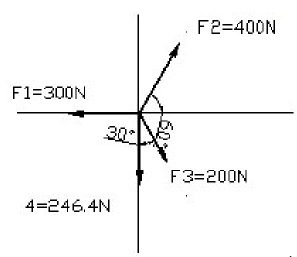
روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQCOS\,\theta = 20^2 + 45^2 + 2\times 20\times 45\times COS138 = 32.97$$

تعادل یک ذره:

طبق قانون نیوتون در حالتی که تاثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حال تعادل است پس می توان گفت وقتی برایند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعادل است.





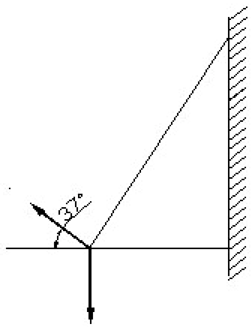
$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum (F_x.i + F_y.j) = 0 \qquad (\sum F_x)i + (\sum F_y)j = 0$$

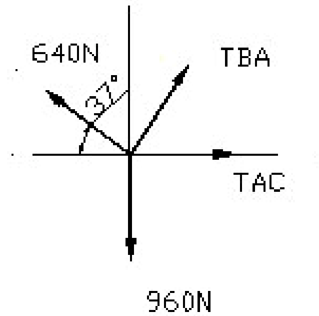
$$\sum Fy = 0 \Rightarrow -246.4 + 400\sin 60 - 200\cos 30 = 0 \Rightarrow -246.4 + 346.41 - 173.2 = 0$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow -300 + 400\cos 60 + 200\sin 30 = 0 \Rightarrow -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال 3:

در شکل زیر کشش در کابلهای ABوACرا بدست اورید.





$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{960}{280}) = 73.74$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T_{AB}\sin 73.74) - 960 + 640\sin 37 = 0 \Rightarrow 0.96T_{AB} - 960 + 385.16 = 0$$

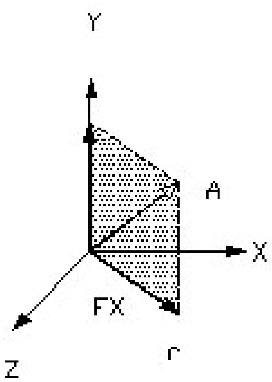
$$T_{AB} = \frac{574.84}{0.96} = 598.79N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{Ac} + 598.79\cos 73.74^o - 640\cos 37^o = 0 \Rightarrow T_{Ac} = 343.74N$$

نیروها در فضا:

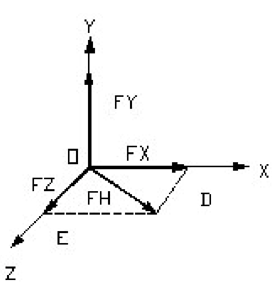
مولفه عمودی $Fx = F\sin\theta_y$

مولفه افقی $Fy = F\cos\theta_y$



θ_y=زاویه نیروی F با محورy

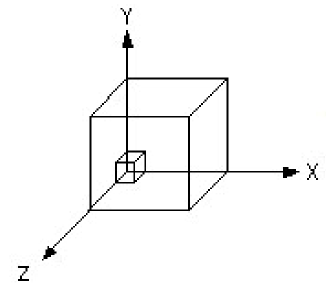
α=زاویه صفحه قائم ABC با صفحهxy



$$Fx = F_h\cos\theta = F\sin\theta_y\cos\theta$$

$$Fz = F_h\sin\theta = F\sin\theta_y\sin\theta$$

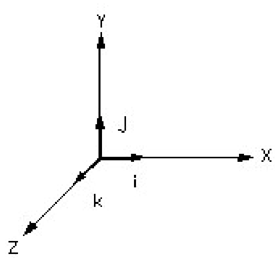
طبق قانون فیثاغورث:



$$F^2 = (OA)^2 = (OC)^2 + (OB)^2 = F_h{}^2 + F_y{}^2$$
$$F_h{}^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (OE)^2 = Fx^2 + Fz^2$$
$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \qquad (1)$$
$$F = \sqrt{F^2x + F^2y + F^2z}$$
$$F_x = F\cos\theta_x$$
$$F_y = F\cos\theta_y \qquad (2)$$
$$F_z = F\cos\theta_z$$

نیروی F را می توان با تعریف بردار یکه هایiوjوkکه به ترتیب در امتداد محورهایxوyوzقرار دارند به صورت زیر بیان کرد.



$$F = F_x.i + F_y.j + F_z.k \qquad (3)$$

2 (4)

$$\Rightarrow F = F(\cos\theta_x.i + \cos\theta_y.j + \cos\theta_z.k)$$

نتیجتا می توان نیرویFرا به صورت ضرب اسکالرFوبردار

$$\lambda = \cos\theta_x.i + \cos\theta_y.j + \cos\theta_z.k \qquad (5)$$

بیان کرد که به λ مولفه یکه بردارFگویند.

(6)

$$\lambda_x = \cos\theta_x$$
$$\lambda_y = \cos\theta_y$$
$$\lambda_z = \cos\theta_z$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی ان است.

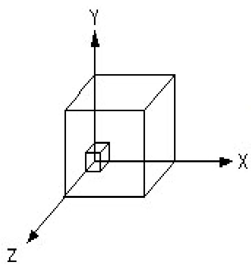
$$\lambda_x{}^2 + \lambda_y{}^2 + \lambda_z{}^2 = 1 \qquad (7)$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$
$$\vec{F} = F.\lambda$$

$$\Rightarrow F=\frac{F_x}{\cos\theta_x}=\frac{F_y}{\cos\theta_y}=\frac{F_z}{\cos\theta_z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتدادی که از دو نقطه می گذرد.

$$\vec{r}_{B/A}=\overrightarrow{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$\lambda_F=\frac{\vec{F}}{|F|}$$



و

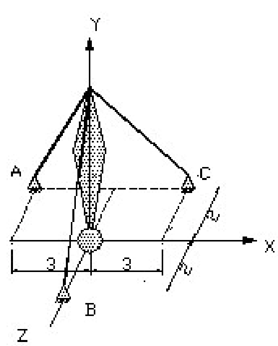
$$A\vec{B}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$

x_b

مثال4:

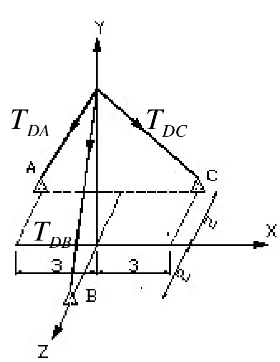
دکل مخابراتی نشان داده شده در شکل زیر به جرم

120kgبوسیله سه کابل مهاری به زمین متصل شده است مطلوب است محاسبه نیروهای کششی در کابلهای مذکور را.



$$A\left|\begin{matrix}-3\\0\\-2\end{matrix}\right.\quad B\left|\begin{matrix}0\\0\\2\end{matrix}\right.\quad C\left|\begin{matrix}3\\0\\-2\end{matrix}\right.\quad D\left|\begin{matrix}0\\6\\0\end{matrix}\right.$$

دیاگرام آزاد جسم



$$W = m.g = 120 \times 10 = 1200\,N$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$|AD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = 4\vec{j} - 2\vec{k} \qquad |BD| = \sqrt{40} \qquad \vec{\lambda}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|BD|} = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} \qquad |CD| = 7 \qquad \vec{\lambda}_{CD} = -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD}.\vec{\lambda}_{AD} = F_{AD}(\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k)$$
$$\vec{F}_{CD} = F_{CD}.\lambda_{CD} = F_{CD}(-\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k)$$
$$\vec{F}_{BD} = F_{BD}.\lambda_{BD} = F_{BD}(\frac{6}{\sqrt{40}}i - \frac{2}{\sqrt{40}}k)$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0 \quad و \quad \Sigma F_y = 0 \quad و \quad \Sigma F_z = 0$$

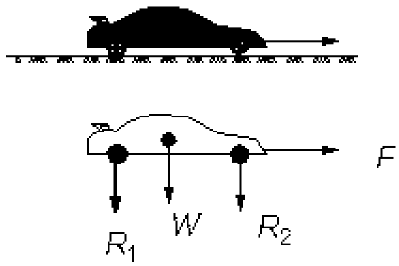
فصل سوم

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد میشوند دو دسته اند:

الف) نیروهای خارجی:نماینده تاثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروها رفتار خارجی جسم صلب را توجیه میکنند.

ب) نیروهای داخلی:نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب رادر کنار هم نگه می دارند.



ضرب بردارها:

الف) ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

خواص حاصلضرب برداری دو بردار PوQکه یک بردار Uاست به قرار زیر است:

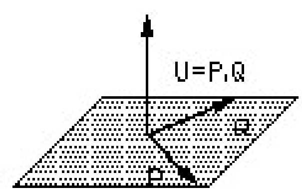
1) بردار حاصلضرب Uبر صفحه PوQعمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راست بدست می اید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردارP)وجهت بسته شدن انگشتان درجهت بردار دیگر بردار (Q)می باشد جهت انگشت شصت جهت بردارUمی باشد

)مقدار حاصلضرب برابر است با مقادیرعددی PوQدرسینوس زاویه بین آن دو

$$U = PQ\sin\theta$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q$$

PوQموازی یا در راستای هم



1) قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

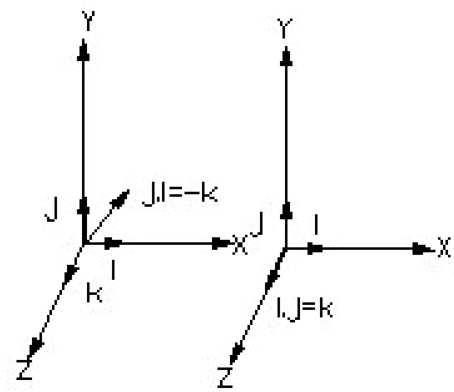
زاویه بینPوQدر جهت مثلثاتی باید باشد

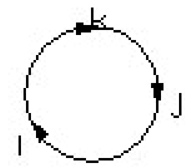
$$P = P \times Q$$ بر روی Qبیافتد , $$Q = Q \times P$$ بر روی Pبیافتد

2)خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

حاصلضرب برداری بر حسب مولفه های قائم





$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

$$\begin{array}{lll} i\times i=0 & i\times j=k & i\times k=-j \\ j\times i=-k & j\times j=0 & j\times k=i \\ k\times i=j & k\times j=-i & k\times k=0 \end{array}$$

$$\vec{P}=(P_X i+P_y j+P_Z k),\vec{Q}=(Q_X i+Q_y j+Q_Z k)$$
$$\vec{P}\times\vec{Q}=(P_X i+P_y j+P_Z k)\times(Q_X i+Q_y j+Q_Z k)$$
$$=P_x(Q_x i.i+Q_y i.j+Q_z i.k)=P_x Q_y k-P_x Q_z j$$
$$=P_y(Q_x j.i+Q_y j.j+Q_z j.k)=-P_y Q_x k+Q_y Q_z i$$
$$=P_z(Q_x k.i+Q_y k.j+Q_z k.k)=P_z Q_x j+P_z Q_y$$
$$\vec{P}\times\vec{Q}=(P_y Q_z-P_z Q_y)i-(P_x Q_z-P_z Q_x)j+(P_x Q_y-P_y Q_x)k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم می بینیم که جمله های طرف راست آن نماینده بسط یک دترمینان هست پس حاصلضرب(u)را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت تر به خاطر سپرده شود.

$$U=\begin{vmatrix} i & j & k \\ P_X & P_y & P_Z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}=(P_y Q_Z-P_Z Q_y)i-(P_X Q_Z-P_Z Q_X)j+(P_X Q_y-P_y Q_X)k$$

ضرب عددی دو بردار و ضرب داخلی:

مقصود از ضرب عددی بردار $\vec{P}$ در بردار $\vec{Q}$ که با هم زاویه θ ساخته اند تعیین عددی است که مقدار آن برابر $U = \vec{P} \times \vec{Q}$ باشد.

وقتی گفته می شود بردار Q را روی P تصویر کنید یعنی ضرب داخلی
$$U = P.Q\cos\theta$$

$$U = \vec{A}.\vec{A} = A.A\cos\theta = A^2$$

از تعریف ضرب داخلی دو بردار نتیجه می شود که بردارهای P و Q در صورتیکه حاصلضرب داخلی شان برابر با صفر گردد متعامد می باشند $P.Q = 0 \Rightarrow P \perp Q$

به عنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند(dof)

$$\begin{array}{lll} i.i = 1 & i.j = 0 & i.k = 0 \\ j.i = 0 & j.j = 1 & j.k = 0 \\ k.i = 0 & k.j = 0 & k.k = 1 \end{array}$$

حاصلضرب بردارهای یکه یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k \qquad \vec{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$

$$\begin{aligned} \vec{P}.\vec{Q} &= (P_x i + P_y j + P_z k)(Q_x i + Q_y j + Q_z k) \\ &= (P_x Q_x i.i + P_x Q_y i.j + P_x Q_z i.k) \\ &+ (P_y Q_x j.i + P_y Q_y j.j + P_y Q_z j,k) \\ &+ (P_z Q_x k.i + P_z Q_y k.j + P_z Q_z k.k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \end{aligned}$$

تعیین زاویه بین دو بردار:

$$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$$

$$\frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} = \frac{P_x}{PQ}.\frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ}.\frac{Q_y}{PQ} + \ldots = \cos\theta$$

$$\frac{P_x}{PQ} = L_1 \quad \frac{Q_x}{PQ} = L_2$$

$$\Rightarrow \cos\theta = L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

که در آن L و m و n کسینوس هاویهای(شیب)بردارها هستند.همچنین مشاهده می گردد که هر دو بار در صورتیکه کسینوس هاوی آنها در رابطه زیر صدق کنند متعامد می باشند.

$$L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

خواص ضرب داخلی بردارها:

1) قانون جابجایی صادق است $\vec{P}.\vec{Q}=\vec{Q}.\vec{P}$

2) قانون توزیع پذیری صادق است $\vec{P}.(\vec{Q}+\vec{R})=\vec{P}.\vec{Q}+\vec{P}.\vec{R}$

مثال:

دو بردار $\vec{A}=10i+20j+3k$ و $\vec{B}=-10j+12k$ مفروضند.

الف) حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را محاسبه نمائید.

ب) زاویه بین دو بردار

ج) تصویر بردار $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

د) بردار تصویر $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

$$U=\vec{A}.\vec{B}=(10i+20j+3k)(-10j+12k)=(10\times0)+(20)(-10)+(3)(12)=-164$$

$$|A|=\sqrt{10^2+20^2+3^2}=22.56$$

$$|B|=\sqrt{(-10)^2+(12)^2}=15.62$$

$$U=AB\cos\theta\Rightarrow-164=22.56\times15.62\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{-164}{22.56\times15.62}$$

$$\theta=117.71^0$$

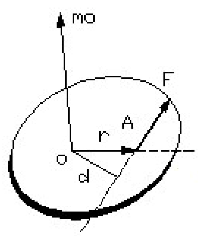
$$\vec{C}=A\cos\alpha=22.56\cos117.71=-10.46$$

$$\lambda=\frac{\vec{B}}{B}=-\frac{10j+12k}{15.62}\Rightarrow\vec{C}=Cn=-10.46\left(\frac{-10j+12k}{15.62}\right)=6.7j-8k$$

گشتاور یک نیروحول نقطه:

فرض کنیم نیرویFبر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده میشود.

مکانAرا می شودبا بردارr که نقطه ثابت مرجع(O)را بهA متصل می کندمشخص کرد که به آن بردار مکانA گویند.

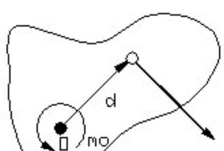


حال می خواهیم گشتاور نیرویF را حولO به صورت ضرب برداریFr تعریف کنیم.

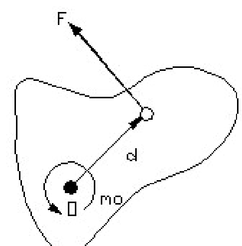
$$M_o = r \times F = rF\sin\theta = Fr\sin\theta = Fd$$

کهd فاصله عمودیO تا خط اثرF می باشد.نیرویF علاوه بر آنکه در جسم تمایل به حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند.این گرایش را گشتاورM نیرو حول محور داده شده نامند.

در سیستم یکاهای(SI)نیرو بر حسب نیوتن و فاصله بر حسب متر(m)بیان می شود،گشتاور نیرو بر حسب نیوتن-متر(N.M)بیان می شود.



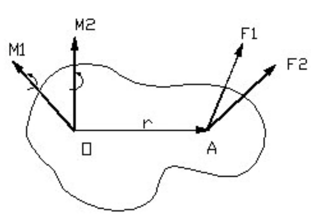
$$m_O = \text{-Fd}$$



$$m_O = +Fd$$

قضیه وارینیون و یا اصل گشتاور:

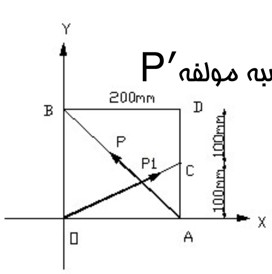
برای نیرو هایی که دریک صفحه واقعندبدین صورت بیان می شودکه گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه می باشد.



$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2$$
$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:

نیرویP=10Nدر امتداد دو نقطهABمربعی به اضلاع200mm اعمال شده است.مطلوبست محاسبه مولفه P′ از نیرویP در امتدادOCباجهت مثبت ازOبه طرفC



کسینوسهای بردار $\vec{OC}$:

$$O = \begin{vmatrix} 0 \to x \\ 0 \to y \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{vmatrix}$$

$$OC = (0.2 - 0)i + (0.1 - 0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + 0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894$$

و

$$m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

$$n\vec{o}c = 0.894i + 0.447j$$

کسینوسهای بردار $\vec{AB}$:

$$A\begin{vmatrix} 0.2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}B(0 - 0.2)i + (0.2 - 0)j$$

$$\alpha = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04 + 0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707$$

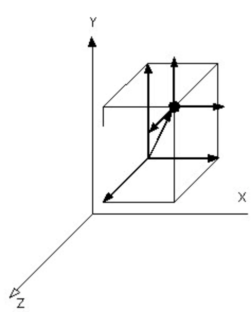
$$B = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n_{\vec{A}B} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$F_{\vec{A}B} = \vec{F}.n_{\vec{A}B} = 10 \times (-0.707i + 0.707j) = -7.07i + 7.07j$$

$$F_{\vec{o}c} = F_{\vec{A}B}.n_{\vec{O}C} = (-7.07i + 7.07j).(0.894i + 0.447j)$$

$$= (-7.07 \times 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16N$$



مولفه های قائم گشتاور در یک نیرو:

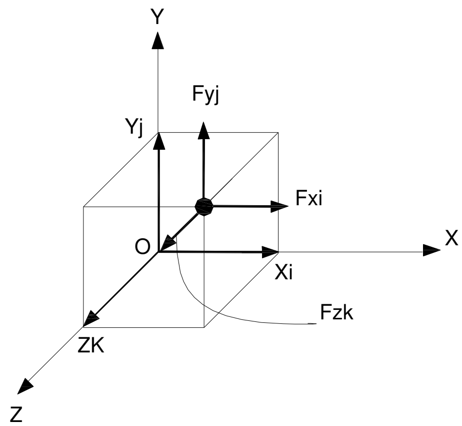
$$m_o = r \times F$$

اگر نقطهB بر مبدا منطبق باشد:

$$r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x.i + F_y.j + F_z.k$$

با جایگذاری در رابطهmo داریم:



$$m_o = m_x.i + m_y.j + m_z.k$$
$$m_x = yF_z - zF_y$$
$$m_y = zF_x - xF_z$$
$$m_z = xF_y - yF_x$$

$$m_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$

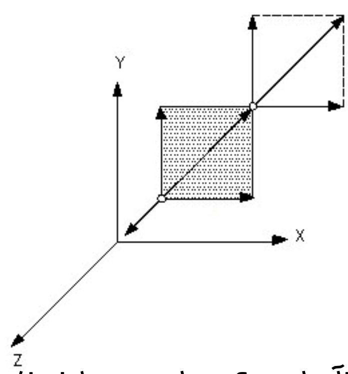
$$m_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

در مسائل دو بعدی Z,FZ =0

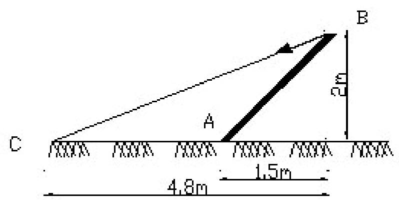
$$mo = (xFy - yFx)k$$



مثبت بودنmo حاکی ازآن است که بردارmo به طرف خارج از صفحه کتاب است(تمایل به چرخاندن جسم حول oدر جهت پادساعتگرددارد)

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

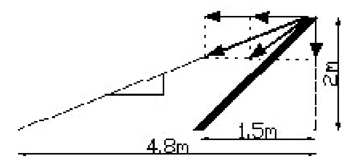
مثال:



مطلوبست گشتاورنیروی $260N$ حول نقطه A را

الف) بوسیله تجزیه نیروی محوری x و y وارد بر نقطه B

ب) بوسیله تجزیه نیروی محورهای x و y در نقطه C

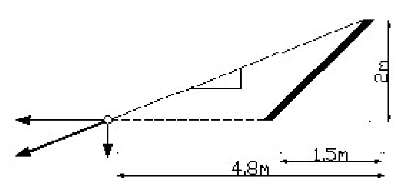


$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_x \times 2 - F_y \times 1.5 = 240 \times 2 - 100 \times 1.5 = 330\mathrm{N.M}$$

ابتدا نیروی $260N$ را در امتداد خط اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.



$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$

$$C\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}4.8\\20\end{vmatrix} \qquad A\begin{vmatrix}3.3\\0\end{vmatrix}$$

$$F_{BC} = F_{BC} \cdot \lambda_{BC} = 260\times\frac{48i+20j}{\sqrt{48^2+20^2}=52} = 240i+100j$$

$$r\,A/B = (4.8-3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$

$$mA = F\times r = (240i+100j)(1.5i+2j) = 240\times 2k - 100\times 1.5k = 330N$$

ضرب سه گانه مختلط سه بردار:

حاصلضرب داخلی سه بردار:

ضرب سه گانه مختلط عبارت است ازحاصلضرب داخلی دو بردارکه یکی از آندو توسط حاصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد.این حاصلضرب که کمیتی عددی می باشدتوسط هر یک از روابط معادل زیر قابل بیان است:

$$(P\times Q).R = R.(P\times Q) = -R.(Q\times P)$$

در حقیقت رعایت پرانتزهادر عبارت فوق الذکرلازم نمی باشد چون نوشتن حاصلضرب صورت $P\times(Q.R)$ بدون مفهوم است همچنین میتوان ثابت کرد که:

$$P\times Q.R = P.Q\times R$$

که قانون جابجائی نقطه و ضربدر را در حاصلضرب سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددی حاصلضرب حاصل شود مشخص میکند.بعلاوه میتوان با استفاده از بسط دادن نشانداد که:

$$P\times Q.R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

حاصلضرب خارجی سه بردار:

عبارت است از حاصلضرب خارجی دو بردار که یکی از آندو خود توسط حاصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بوده و توسط یکی از عبارت معادل زیر بیان می شود.

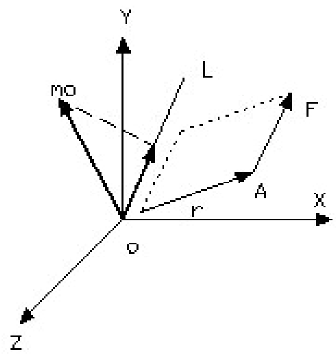
$$(P\times Q)\times R = -R\times(P\times Q) = R\times(Q\times P)$$

در اینجا وجود پرانتز ضرورت دارد زیرا در رابطه ای مانند $P \times Q \times R$ به علت نا مشخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند مبهم است.می توان ثابت کرد که حاصلضرب سه گانه خارجی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R.PQ - \mathrm{R.QP}$$
$$\mathrm{P} \times (\mathrm{Q} \times \mathrm{R}) = \mathrm{P.RQ} - \mathrm{P.QR}$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی F حول نقطه o برابر mo میباشد حال اگر محور oL را در نظر بگیریم گشتاور moL نیروی f حول محور oL را به صورت تصویر گشتاور mo روی oL تعریف می کنیم.



اگر برداریکه در امتداد oL را با λ نشان دهیم خواهیم داشت.

$$m_{oL} = \lambda.\mathrm{m_o} = \lambda.(\mathrm{r} \times \mathrm{F})$$

گشتاور یک نیرو تصویر یک برداربر روی یک محور

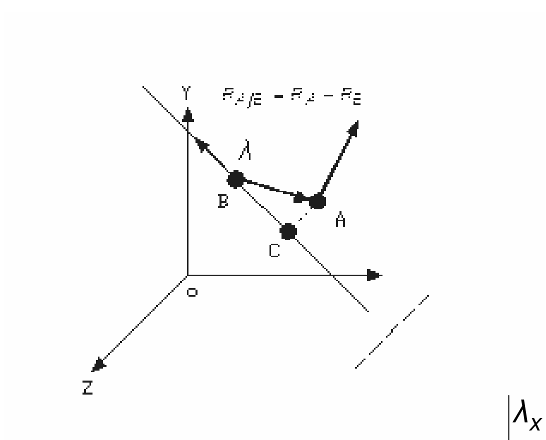
که گشتاور نیروی F حول oL اسکالراست واز ضرب سه گانه مختلط سه بردار $\mathrm{F}, \mathrm{r}, \lambda$ بدست می اید وبا:

$$m_{oL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\lambda_z, \lambda_y, \lambda_x =$ کسینوسهای بردار oL

$z, y, x =$ مختصات نقطه اثر نیروی F

$F_z, F_y, F_x =$ مولفه های نیروی F



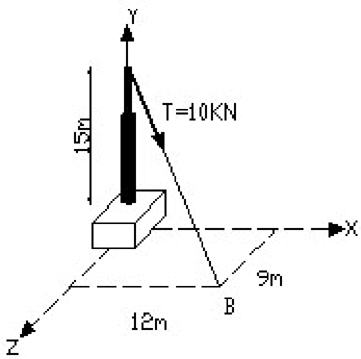
$$m_{BL} = \lambda.m_B = \lambda.(r\,A/B \times F)$$
$$r\,A/B = r_A - \mathrm{r_B}$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

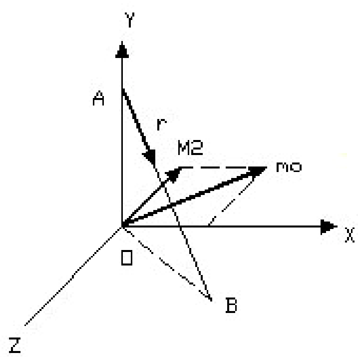
$$m_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x\,A/B & y\,A/B & z\,A/B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال:

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب نقطه A را به نقطه B متصل می کند تحت کشش T=10KN می باشد.مطلوبست گشتاور M_Z نیروی T حول محور Z ها ماربرپایه دیرک می باشد.



	A	B
	0	12
	15	0
	0	9



بردار M_O عمود بر صفحه ای است که T ونقطه o را در بر می گیرد.

$$m_Z = m_o.k = (-15\times5.66\text{k} + 4.24\text{i}).\text{kz} = -84.9\text{KN.m}$$

$$\vec{r} = 15j(m)$$

$$n = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(12-0)\text{i} + (0-15)\text{j} + (9-0)\text{k}}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} = 0.566i - 0.707\text{j} + 4.24\text{k}$$

$$\vec{\text{T}} = 10\text{n} = 5.66\text{i} - 7.07\text{j} + 4.24\text{k}$$

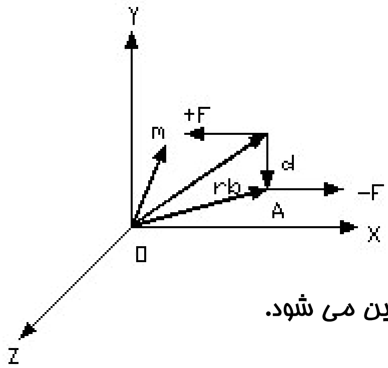
$$\text{m}_\text{o} = \vec{\text{r}} \times \vec{\text{T}} = (15\text{j}) \times (5.66\text{i} - 7.07\text{j} + 4.24\text{k})$$

$$= (-15\times5.66\text{k} + 15\times4.24\text{i})$$

علامت منفی معرف ان است که M_Z در خلاف جهت محورz ها عمل می کند.

کوپل یا زوج نیرو:

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی،موازی ومختلف الجهت که در امتداد یک خط واقع نیستند کوپل خوانده می شود.

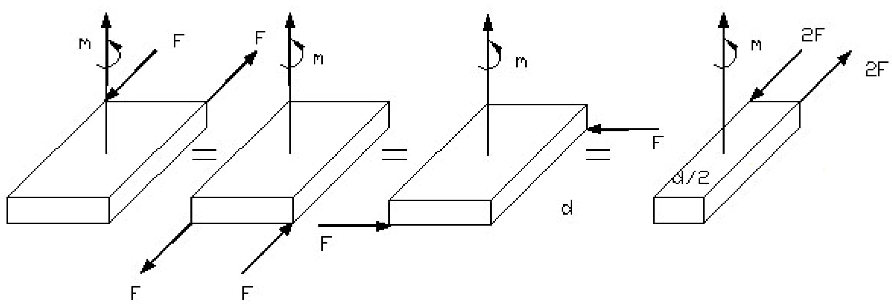


$$m = R_A \times (-F) + r_B \times (F) = (-r_A + r_B) \times F$$
$$r = (-r_A + r_B)$$
$$m = r \times F$$
$$m = rF \sin\theta = Fd$$

کهdفاصله عمودی میان خط اثرهایFو$F-$است.جهت mازروی قاعده دست راست تعیین می شود.

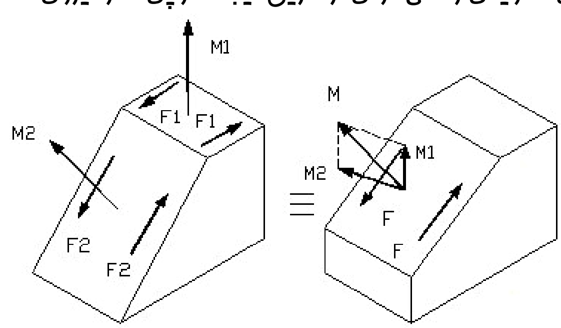
کوپلهای معادل:

با تغییر یافتن مقادیرFوd یک کوپل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند،تغییری در آن کوپل به وجود نخواهدآمد.به همین ترتیب مقدار یک کوپل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفحات موازی یکدیگرعمل می نمایند.شکلهای زیر چهارحالت مختلف یک کوپل ثابتMرانشان میدهد.



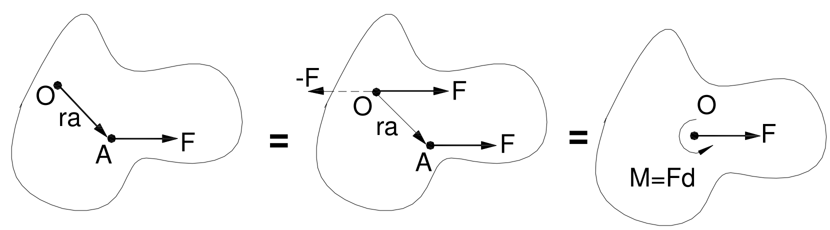
جمع بستن کوپلها:

کوپلهائی را که در صفحات غیر موازی با یکدیگرعمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارهاجمع کرد.مثلاًدرشکل(A)کوپل M_1دراثرنیروهای F_1وکوپل M_2دراثر نیروهای F_2در دو صفحه به صورت نشان داده شده عمل می کنند این دوکوپل رامی توان با حاصل جمع بردارشان(M)به صورتی که در شکل(B)نشان داده شده است تعویض کرد.این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپلMاز نیرویF که ترکیب برداری F_1 و F_2 می باشد تأئیدکرد.



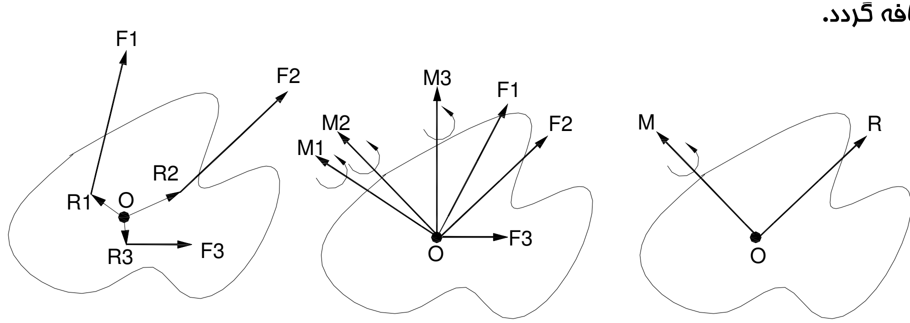
انتقال بردارنیرو:

یک کوپل مشخص ویک نیرو را که در صفحه کوپل واقع است را می توان به یک نیروی واحد تبدیل کرد.



برایند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی F رامی توان به موازات خودبه نقطه دلخواه O انتقال داد.
مشروط به اینکه اندازه نیرو ثابت مانده ویک کوپل Fd که درآن d بازوی گشتاورازO تاموقعیت ابتدائی F می باشد به آن اضافه گردد.



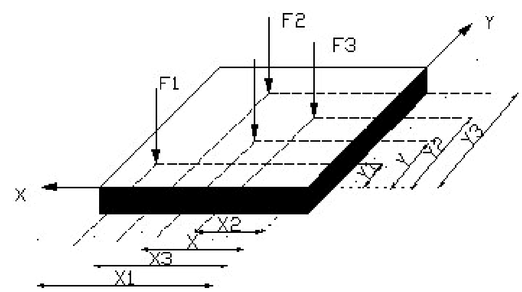
$$R = \Sigma F = F_1 + F_2 + \ldots$$
$$M = \Sigma m_1 + m_2 + \ldots = \Sigma (r \times F)$$

مجموعه نیروهای متوازی:

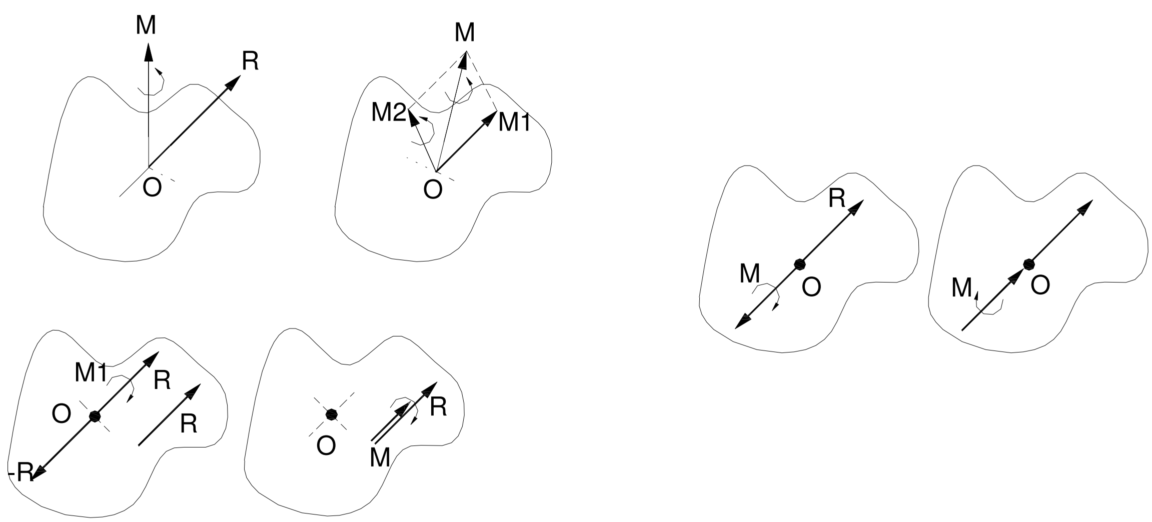
واضح است که برایند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد.موقعیت خط اثر برایند باستفاده از قضیه وارینون به دست می آید.چون گشتاور برایند حول هرمحوری می باید برابر حاصل جمع گشتاوری مولفه های آنحول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$
$$\bar{x}_R = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3$$
$$\bar{y}_R = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3$$

$$R = \sum F$$
$$\bar{x} = \frac{\sum(F_x)}{R}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum(F_y)}{R}$$



برایند پیچ گوشتی وار:

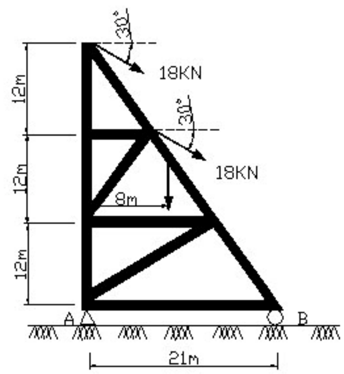


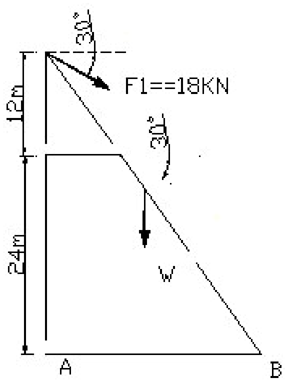
در صورتی که بردار برایند کوپل هاM به موازات برایند نیروها باشد. برایند حاصل برایندپیچ گوشتی وار خوانده میشود.هر مجموعه نیرو را می توان به یک برایند پیچ گوشتی وارکه در امتداد خط اثر منحصر بفردی عمل می کند،تبدیل کرد.

مثال:

برتیر مشبکی به وزن 40KN دوکابل که نیروی کشش هر کدام برابر با 18KN می باشد مطابق شکل اثر می کند.

مطلوب است برایند نیروی وارد بر تیر مشبک ونقطه تقاطع امتداد اثر برایند با خط AB





$$F_1 = F_2 = 15.59i - 9j$$

$$R = \sum F = -40j + 15.59i - 9j + 15.59i - 9j = 31.2i - 58j$$

$$R = \sqrt{(31.2)^2 + (58)^2} = 65.86KN$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{58}{31.2}\right) = 61.7^o$$

$$\sum MA = 0$$

$$M_A^R = (31.2)\times(36) + (31.2)\times(24) + (58)\times(7) = 1318KN.M$$

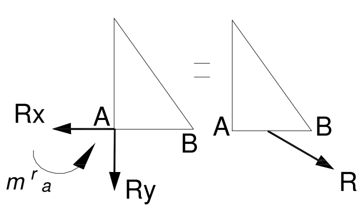
$$M_A^R = \sum r\times F = (8)i\times(-40)j + (36)j\times(15.59i - 9j) + (7i + 24j)\times(15.59i - 9j)$$

$$-58xk = -1.318k \Rightarrow x = 22.7$$

روش دوم:

$$M_A^R = (-320 - 561 - 63 - 374)k = (-1.318KN.M)k$$

$$r\times R = M_A^R \Rightarrow (x)i\times(31.2i - 58j) = -1.318k$$



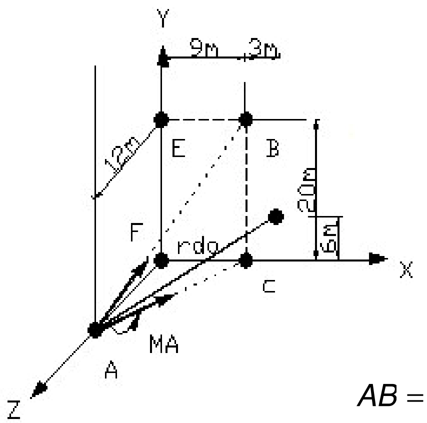
$$F\times d = M_A^R$$

$$15.59\times 36 + 15.59\times 24 + 9\times 7 + 40\times 8 = 58\bar{x}$$

$$1318 = 58\bar{x} \Rightarrow \bar{x}22.7$$

مثال:

سیستم کوپل نیرو در نقطهAشامل نیرویF به مقدار 25N و کوپلMA به گشت آور 250N.M می باشد.این سیستم کوپل نیرو را به سیستم کوپل نیروی معادل در نقطهD جایگزین کنید.



$$A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 9 \\ 20 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad D\begin{vmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$AB = 9i + 20j - 12k$$
$$F = 9i + 20j - 12k$$
$$AC = 9i - 12k$$
$$M_A = 150i - 200k$$
$$M_D = M_A + S \times F$$
$$S = \vec{D}A = -12i - 6j + 12k$$

$$AB = 25m$$
$$F = 25N$$
$$AC = 15m$$
$$M_A = 250N.m$$

$$MD = MA + \begin{vmatrix} ijk \\ -12-612 \\ 920-12 \end{vmatrix} = MA + (72-240)i + (108-144)j + (-240+54)k$$

کوپل نیروی سیستم در نقطهD

$$M_D = (1500i - 200k) - 168i - 36j - 180k$$
$$\begin{cases} M_D = -18i - 36j - 386k \\ F = 9i + 20j - 12k \end{cases}$$

فصل چهارم

تعادل اجسام صلب:

مفهوم مهندسی تعادل و یا سکون آن است که ذره و یا جسم مادی حرکتی نداشته باشد لذا وقتی که نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می دهند می گویند که جسم صلب در حال تعادل است.بنابراین شرط لازم کافی برای تعادل یک جسم صلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum F = 0 \quad \text{و} \quad \sum M_O = \sum (r \times F) = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

$$\sum m_x = 0 \qquad \sum m_y = 0 \qquad \sum m_z = 0$$

نمودار جسم آزاد:

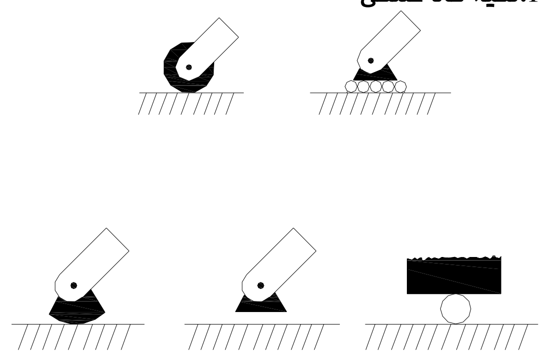
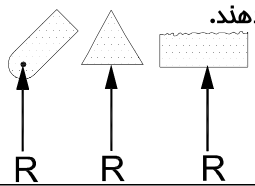
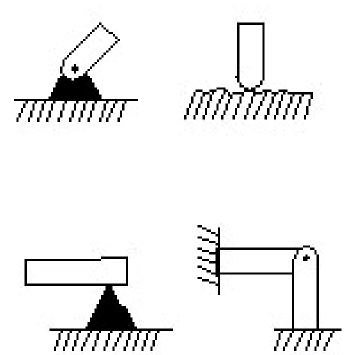
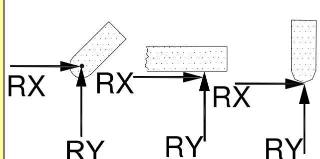
نمودارهای جسم آزاد را در فصول قبل به کرات به کار بردیم،به خاطر اهمیت این نمودارها به طور خلاصه روش ترسیم را در زیر می آوریم.

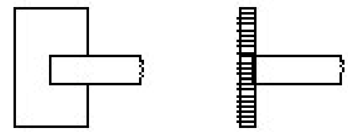
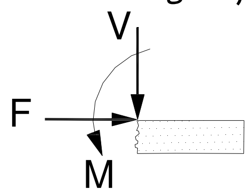
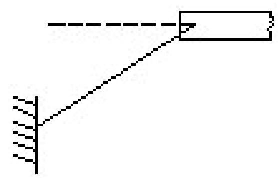
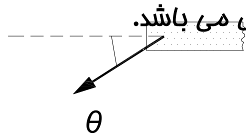
1) جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و سپس این جسم را از بین و تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم.

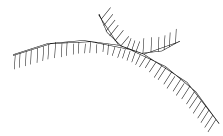
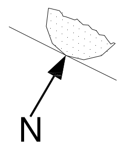
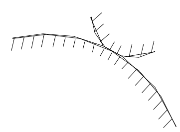
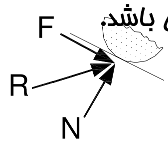
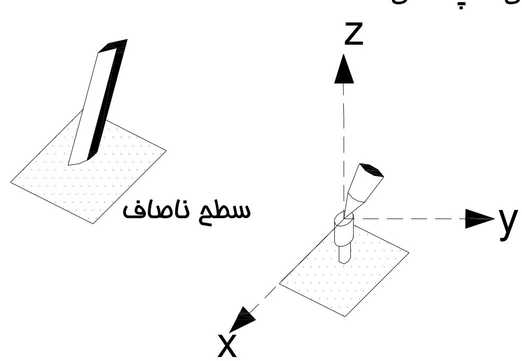
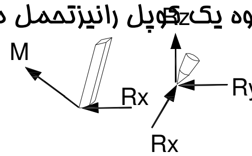
2) همه نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می دهیم به صورتی که بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.

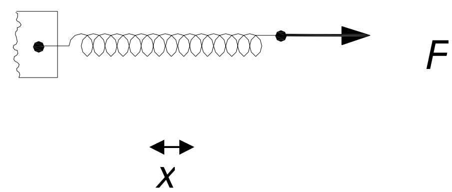
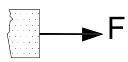
3) نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهایی هستند که اجسام دیگر با مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند.

نیروهای اتصالی و تکیه گاهی:

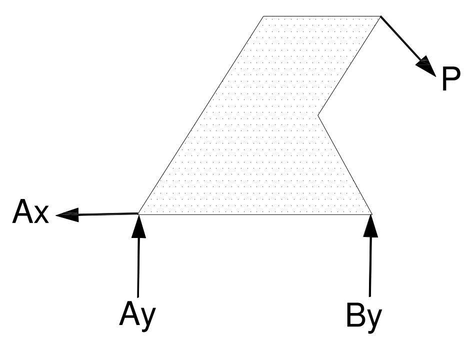
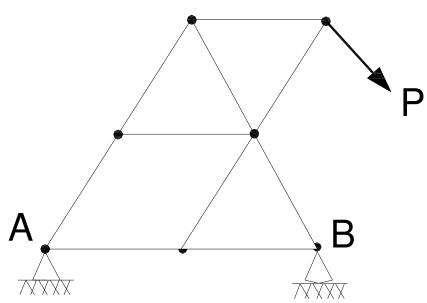
نوع تکیه گاه	اثربروی جزء منفصل شده	تعداد مجهولات
1.تکیه گاه غلتکی 	تکیه گاههای غلتکی،چرخی،ساچمه ای وسایرانواع که درشکل نشان داده شده است نیروی فشاری وعمودبرسطح تماس راانتقال می دهند. 	1
2. اتصال مفصلی باخارمغزی 	یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشدمی تواندنیرو یی درهرامتدادوجهت درصفحه عمود برمحورخارراانتقال دهد.لولائی که آزادی گردشنداشته باشدمی تواند تحت تاثیریک کوپل نیزباشد 	2

3. اتصال گیردار 	یک اتصال گیردارمی تواندنیروئی محوری F ونیروئی(برشی)V وکوپلMکه درمقابل چرخش مقاومت می کندراتحمل کند. 	3
4. کابل،تسمه،زنجیرو 	نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود.همیشه به صورت یک نیروی کششی درجهت گریزازجسم ودرامتدادمماس برکابل می باشد. 	1

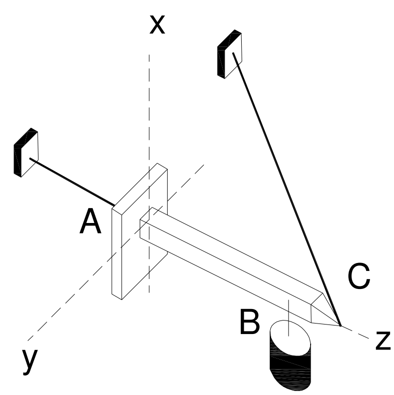
نوع تکیه گاه	اثربرروی جزء منفصل شده	تعداد مجهولات
سطوح صیقلی 	نیروی تماس همواره فشاری است وعمودبرسطح تماس 	1
سطوح زبر 	سطوح زبرقابلیت تحمل یک مولفه مماسی نیرویعنی F (نیروی اصطکاک)از برایند نیروی تماسR رانیزعلاوه برمولفه عمودیNدارامی باشد. 	2
اتصال ساچمه ای 	یک اتصال ساچمه ای نیروئی رادرهرجهت تحمل مینماید.یک اتصال جوش شده ساچمه ای بعلاوه یک کوپل رانیزتحمل می کند.  اتصال جوش شده اتصال آزاد	3

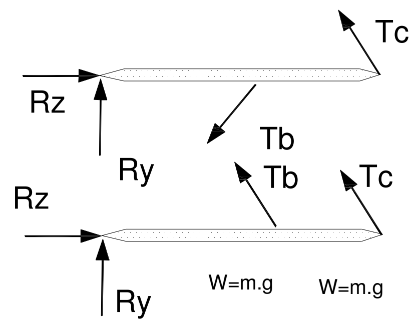
عمل فنر 	نیروی وارده برفنردرصورتیکه کشیده شودکششی ودرصورتی که فشرده شودفشاری است.برای یک فنر ارتجاعی باالاستیسیته خطی ،سختی Kعبارتندازنیروی لازم برای تغییر طول آن به اندازه واحد 	

نمونه هایی از ترسیم آزاد:

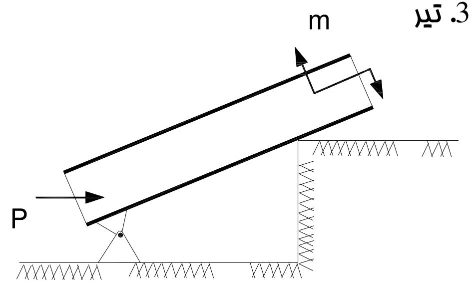
نمودارجسم آزاد	مجموعه سازه
	1. خرپای مسطح 

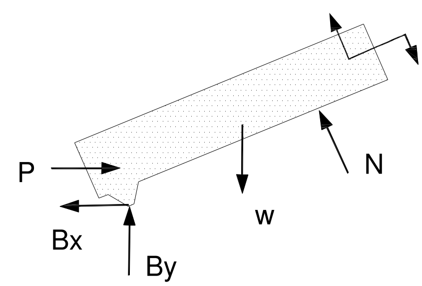
2. دکل فضائی



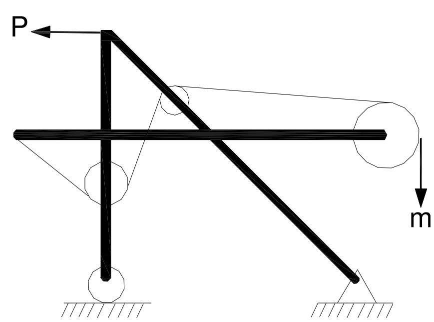


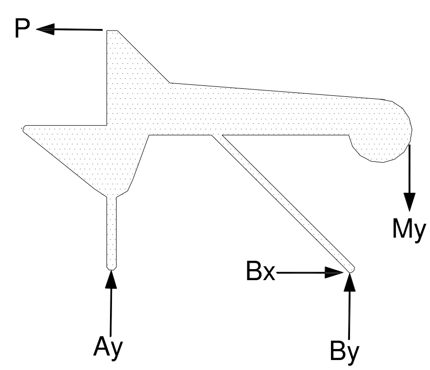
3. تیر



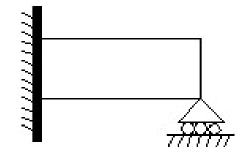


4. یک مجموعه سازه صلب متشکل از چند عضو





عکس العمل های نا معین از لحاظ استاتیکی ـ تیرهای ناقص:



r=3= معادلات   R= مجهولات

نا معین $R > 3 \Rightarrow$

$R = 4 > 3 \Rightarrow n = 4 - 3 = 1$

نا پایدار(مقید ناقص) $R < 3 \Rightarrow$

$R = 2 < 3$

معین $R = 3 \Rightarrow$

$R = 3 = 3 \Rightarrow n = 3 - 3 = 0$

درحالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدد است که اگر کمتر از شش عدد مجهول داشته باشیماستحکام ناقص است واگرمجهولات بیشتر از شش عدد باشد استحکام نا معین است واگر تعداد مجهولات شش عدد یعنی مساوی معادلات باشد معین است.

معین $R = 6 \Rightarrow$

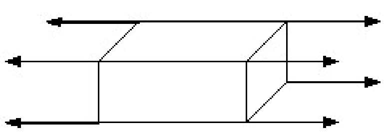
نا معین $R > 6 \Rightarrow$

نا پایدار $R < 6 \Rightarrow$

در صورتی که مجهولات شش عدد باشند ولی همه موازی باشند ویعنی در صفحه قرار دارند   این قابل قبول نیست

برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه یک یا دو ویاسه مجهولی باشند



لذا برای حل معادلات زیر را می نویسیم.

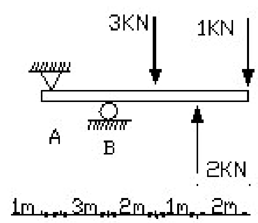
1) سه معادله ی تعادل

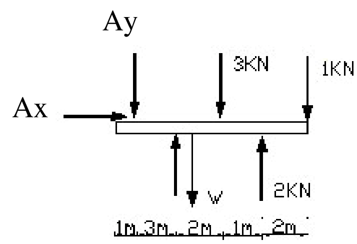
$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma M_A = 0,\ \Sigma M_B = 0$$
$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M_O = 0$$

که نقطه ی B در آن طوری انتخاب شودکه خط AB موازی با محورy نباشدویا $\Sigma M_B = 0$ و $\Sigma M_O = 0$ و $\Sigma M_A = 0$ که نقطه های C,B,A روی یک خط راست نباشند.

مثال:

تیر یکنواخت 9M متری دارای جرمی برابر 200kgکیلو گرم می باشدودر صفحه قائم توسط نیروهای موازی به صورت نشان داده شده در شکل بار گذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاههای مفصلی متحرک درB,Aرا محاسبه کنید.



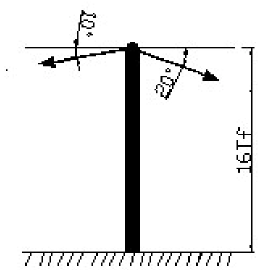


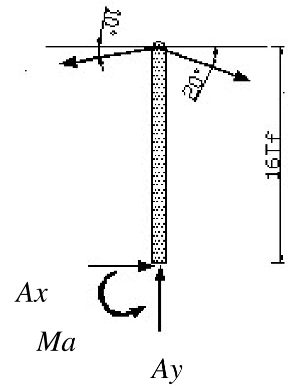
$$W = m.g = 200\times10 = 2000N = 2KN$$

$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow$$
$$-B_y\times3+2\times3.5-2\times6+1\times8-3\times5=0$$
$$B_y = 6KN$$
$$+\uparrow\sum F_y = 0$$
$$-A_y+6-2-3+2-1=0\rightarrow$$
$$+\rightarrow\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$
$$cont = +\uparrow\sum M_B = 0 \Rightarrow -2\times3+2\times0.5+3\times2-2\times3+1\times5=0$$

مثال:

تیر تلفنی به وزن300Lb برای نگهداری دو انتهای سیم بکار برده شده کشش در سیم سمت چپ80 پوندو امتداد آن با افق زاویه 10^o می سازد(a)هر گاه کشش سیم T_2 صفر باشد معین کنید عکس العمل در نقطهA را (b)بیشترین و کمترین مقدار T_2 را هرگاه مقدار کوپل وارد بر نقطهA بیش از $600Lb\text{-ft}$ نباشند.





$T_2 = 0$

$+\rightarrow \ \sum F_x = 0 \qquad A_x - 80\cos 10^o = 0 \Rightarrow A_x = 78.8Lb$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y - 300 - 80(\sin 10^o) = 0 \Rightarrow A_y = 314Lb \uparrow$

$+ \sum M_A = 0 \qquad M_A + 80(\cos 10^o)\times(16ft) = 0 \Rightarrow$

$M_A = -1260\text{Lb-ft}$
$\text{M}_A = 1260Lb\text{-ft}$

$T_2 \neq 0 \qquad M_A = 1260Lb\text{-ft}$

$(80\cos 10^o)(16ft) - (\text{T}_2\cos 20^o)(16ft) + M_A = 0$
$1260 - \text{T}_2\cos 20^o \times 16 \pm 600Lb\text{-ft} = 0$

$+ \sum M_A = 0 \qquad \text{T}_2 = 43.9Lb, T_2 = 1273.7Lb$

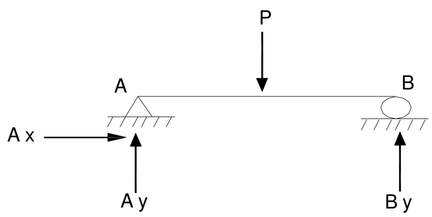
گشت آور حول نقطهAکوچکتراز $600Lb\text{-ft}+$است وقتی که

$43.9Lb \leq T_2$

معادلات تعادل برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانندبسته به نوع تکیه گاه –یک یا دو یا سه مجهولی باشند لذا برای حل معادلات   را به صورت زیر را می نویسیم.

1) سه معادله ی تعادل



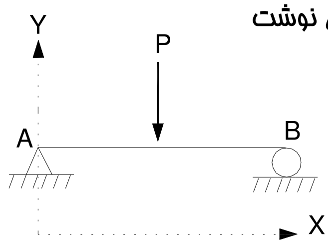
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum m_A = 0$$

$$A_x = 0$$

$$Ay + P/2 - P = 0$$
$$A_y = P/2 \uparrow$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$
$$B_y = P/2 \uparrow$$

اما به غیر از این حالت چند مورد معادله تعادل دیگر نیز می توان نوشت



$\sum F_x = 0$ و $\sum m_A = 0$ و $\sum m_B = 0$

$$A_x = 0$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$
$$B_y = P/2 \uparrow$$

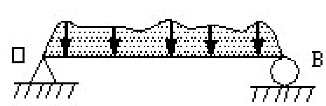
$$-A_y \times L + P \times L/2 = 0$$
$$A_y = P/2 \uparrow$$

اما باید دقت کرد که نقطه B باید طوری انتخاب گرددکه خط AB موازی با محور y ها نباشد.

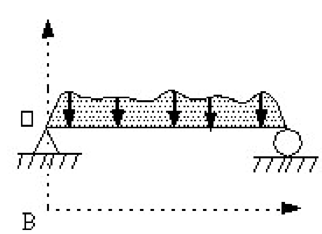
اشتباه $\sum F_x = 0$ و $\sum m_A = 0$ و $\sum m_{B'} = 0$

لذا مفهوم تعادل به صورت زیر بیان می گردد.

1)



صحیح

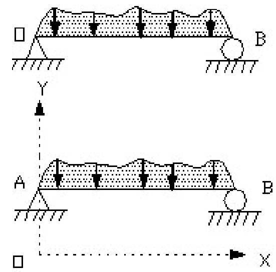


اشتباه

$$\sum m_O = 0$$
$$\sum m_B = 0$$
$$\sum F_x = 0$$

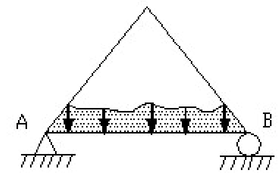
2)

$$\sum F_y = 0$$
$$\sum m_O = 0$$
$$\sum m_B = 0$$



اشتباه

صحیح



3)

$$\sum m_A = 0$$
$$\sum m_B = 0$$
$$\sum m_C = 0$$

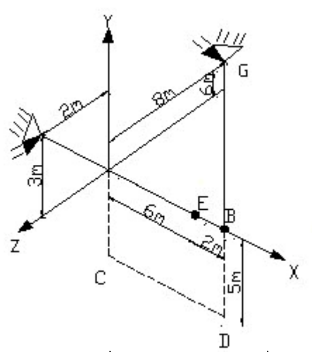
معادلات تعادل برای اجسام سه بعدی :

در حالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدداست.

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_2 = 0 \qquad \sum m_x = 0 \qquad \sum m_y = 0 \qquad \sum m_z = 0$$

مثال:

صفحه ای همگن به ابعاد 5×8 به وزن 270N در نقطه A بر روی کاسه ساچمه متکی بوده و بوسیله دو کابل نگهداری می شود،معین کنید کشش در هر کابل و عکس العمل در نقطه A را.



$$A\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\0\\0\end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix}0\\-5\\0\end{vmatrix} \quad D\begin{vmatrix}8\\-5\\0\end{vmatrix} \quad E\begin{vmatrix}6\\0\\0\end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix} \quad G\begin{vmatrix}0\\4\\-8\end{vmatrix}$$

$$T_{EF} = T_{EF}(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$T_{BG} = T_{BG}(-\frac{8}{12}i + \frac{4}{12}j - \frac{2}{12}k) = T_{BG}(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k)$$

$$+\uparrow \sum M_A = 0$$

$$(4i)\times(-270j) + (6i)\times(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)T_{EF}$$

$$+(8i)\times(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k)T_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow -1080k + \frac{18}{7}T_{EF}k - \frac{12}{7}T_{EF}j + \frac{8}{3}T_{BG}k + \frac{16}{3}T_{BG}j = 0$$

$$-\frac{12}{7}T_{EF} + \frac{16}{3}T_{BG} = 0 \qquad T_{EF} = 315N$$

$$\frac{18}{7}T_{EF} + \frac{2}{3}T_{BG} - 1080 = 0 \qquad T_{BG} = 101.3N$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow A + T_{EF} + T_{BG} - 270j = 0$$

$$A_x i + A_y j + A_z k + 315(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)$$
$$+(101.3)(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k) - 270j = 0$$

$$[A_x - \frac{6}{7}\times 315 - \frac{2}{3}(101.3)]i + [A_y + \frac{3}{7}\times 315 + \frac{1}{3}\times 101.3 - 270]j$$
$$+[A_z + \frac{2}{7}(315) - \frac{2}{3}(101.3)]k = 0$$

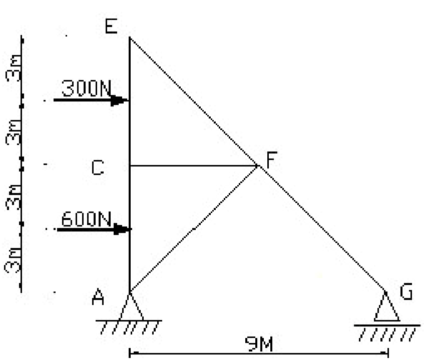
$$A_x - 270 - 67.5 = 0 \qquad A_x = 338LbN$$

$$A_y + 135 + 33.8 - 270 = 0 \qquad A_y = 101.2N$$

$$A_Z + 90 - 67.5 = 0 \qquad A_z = -22.5N$$

مثال:

معین کنیدمولفه نیروی تکیه گاهی واردبرقاب مشبک زیر



$$+ \sum M_A = 0$$

$$-600\times 3 - 300\times 9 + G_y \times 9 = 0 \Rightarrow G_y = 500N \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$G_y + A_y = 0 \Rightarrow A_y = -500 \Rightarrow A_y = 500N \downarrow$$

$cont:$

$$+ \sum M_G = 0$$

$$300\times 9 + 600\times 3 - 500\times 9 = 0$$

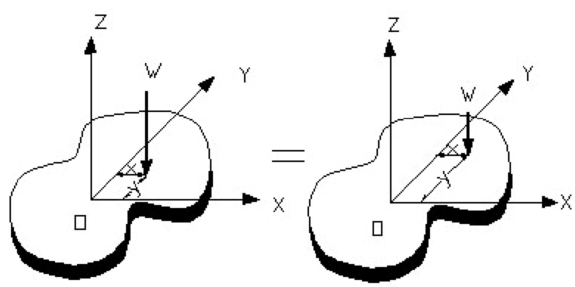
نیروهای گسترده:مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

گرانیگاه جسم دو بعدی

گرانیگاه یک صفحه:

یک ورق تخت افقی را در نظر می گیریم این ورق را می توانیم به8 جزء کوچک تقسیم کنیم مختصات جزء اول را باxوy و مختصات جزء دوم را با y_2, x_2
نشان می دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزای ورق را به ترتیب با $\Delta W_n, \Delta W_2, \Delta W_1$ نشان می دهیم.

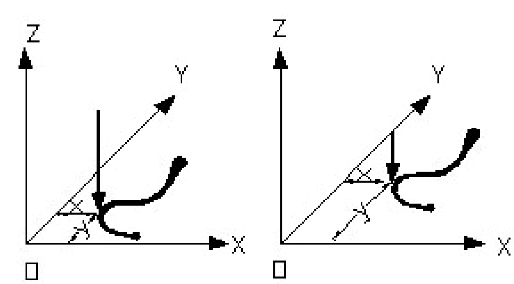
$$\sum F_z \Rightarrow W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_n$$



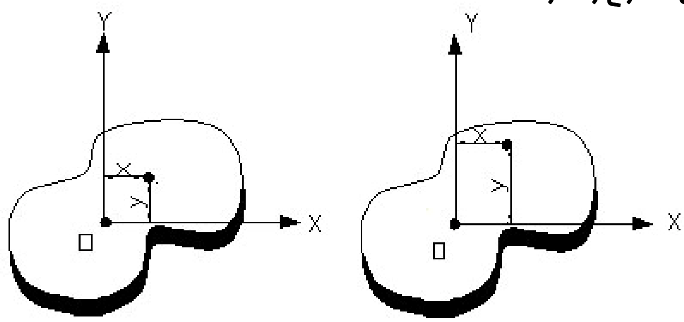
$$\sum M_y : \bar{x}w = \sum x\Delta w, \sum Mx : \bar{y}w = \sum yw$$
$$\sum M_y : \bar{x}w = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + \ldots + x_n\Delta w_n$$
$$\sum M_x : \bar{y}w = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + \ldots y_n\Delta w_n$$

اگر تعداد اجزاء افزایش یابد و اندازه هر جزء را کاهش بدهیم عبارتهای زیر به دست می آید.

$$\bar{y}w = \int ydw, \quad \bar{x}w = \int xdw, \quad W = \int dw$$



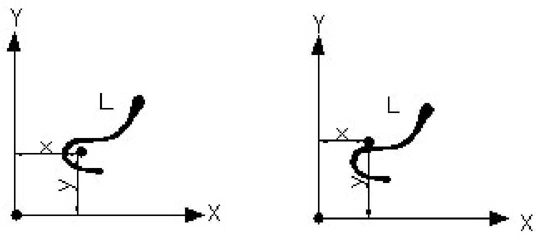
مرکزهای هندسی سطوح وخطوط:



$$\sum M_y = \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \ldots + x_n\Delta_n$$

$$\sum M_x = \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \ldots + y_n\Delta_n$$

$$\bar{x}A = \int xdA \qquad \bar{y}A = \int ydA$$



$$\bar{y}L = \int ydL$$

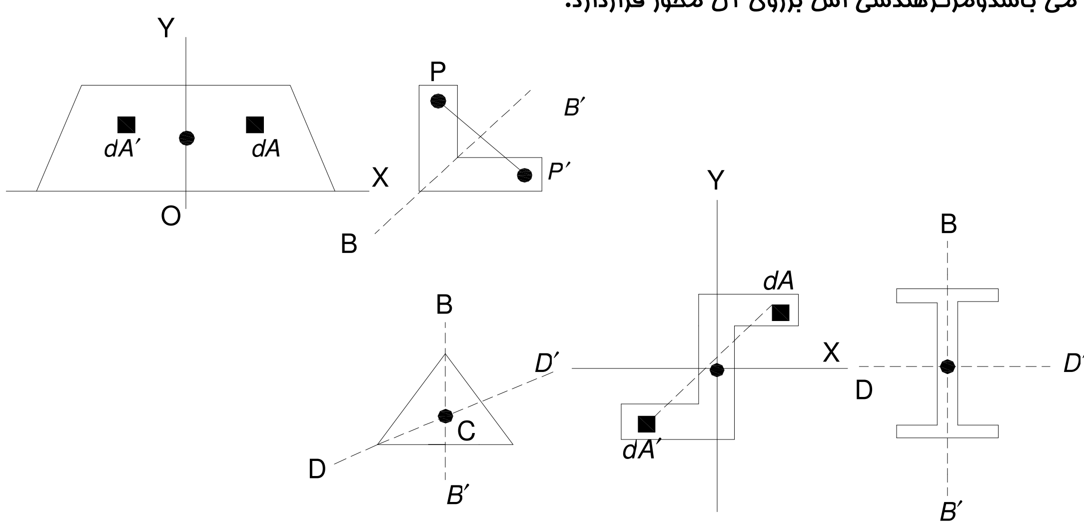
$$\bar{x}L = \int xdL$$

گشتاورهای اول سطوح وخطوط:

$$Qy = \int xdA \qquad Qx = \int ydA$$

$$Qy = \bar{x}A \qquad Qx = \bar{y}A$$

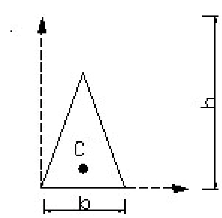
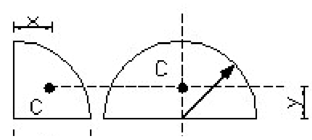
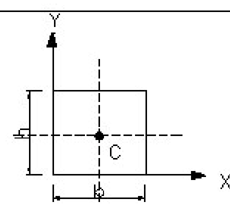
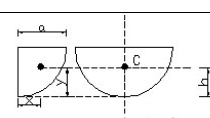
وقتی سطحی مانند A یا خطی مانند L دارای یک محور تقارن باشد،گشتاور اول آن نسبت به آن محور برابر صفر می باشدومرکزهندسی اش برروی آن محور قراردارد.

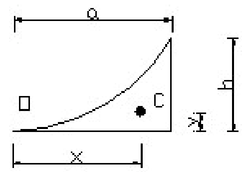


اگرسطحی یا خطی دارای دو محورتقارن باشدمرکزهندسی اش C باید در محل تلاقی دو محورتقارن قرارداشته باشد.

سطحA را نسبت به مرکزO متقارن می گویند اگرمتناظرباهرجزء سطحdA به مختصات y,x یک جزء سطح dA' به مختصات-x,-y وجودداشته باشددراین صورت

$$Qx = Qy = 0$$

نام شکل	شکل	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	مساحت
مثلث		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$4r/3\pi$	$4r/3\pi$	$\pi r^2/4$
نیم دایره		0	$4r/3\pi$	$\pi r^2/2$
مستطیل		$b/2$	$h/2$	$b-h$
نیم سهمی		$3a/8$	$2h/5$	$2ah/3$

$4ah/3$	$3h/5$	0		سهمی
$ah/3$	$3h/10$	$3a/4$		اسپاندرال سهمی

مثال:

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر راتعیین کنید.

$\bar{y}A$	$\bar{x}A$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	A	سطح
32	4	4	0.5	8	I
2	12	0.5	3	4	
34	16	_	_	12	$\sum$

$$\bar{x}\sum A = \sum \bar{x}A \Rightarrow \bar{x}(12) = 16 \Rightarrow \bar{x} = 1.33m$$

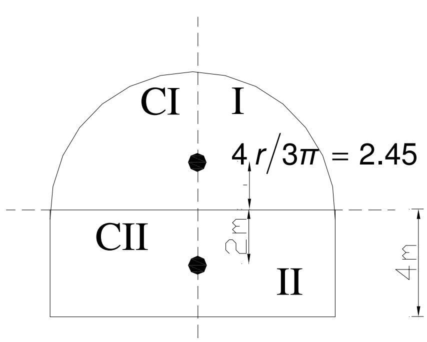
$$\bar{y}\sum A = \sum \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(12) = 34 \Rightarrow \bar{y} = 2.83m$$

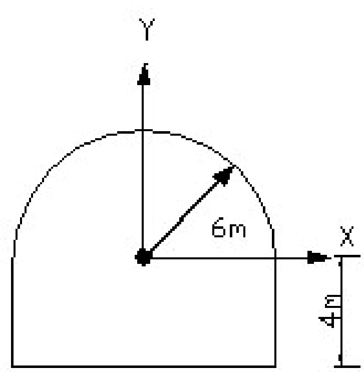
مثال:

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر را تعیین کنید.

بعلت تقارن $\bar{x} = 0$

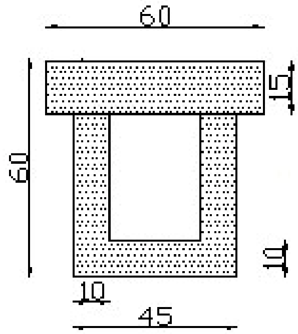
$\bar{y}A$	$\bar{y}$	A	سطح
144	2.54	56.6	I
-96	-2	48	II
48	-	104.6	$\sum$





مثال:

بعلت تقارن $\bar{x} = 0$



$$\bar{y}\sum A = \sum \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(104.6) = 48 \Rightarrow \bar{y} = 0.459m$$

I

III

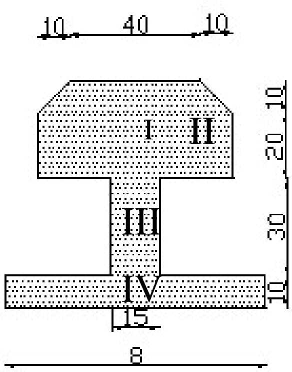
II

سطح	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
I	$60\times15=900$	7.5	6750
II	$45\times45=2025$	$(45/2+15)=37.5$	75937.5
III	$-25\times35=-875$	$(35/2+15)=32.5$	-28437.5
$\sum$	2050		24250

$$\bar{y}\sum A = \sum yA \Rightarrow \bar{y}\times2050 = 54250 \Rightarrow \bar{y} = 26.46cm$$

مثال:

بعلت تقارن $\bar{x} = 0$



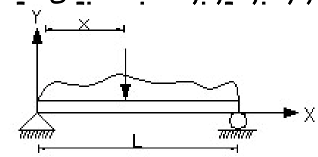
سطح	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
I	$60\times30=1800$	15	27000
II	$-2\times10\times\frac{10}{2}=-100$	$10/3=3.33$	-333.3
IV	$80\times10=800$	5+60=65	52000
$\sum$	2950		98916.7

$$\bar{y}\sum A = \sum yA \Rightarrow \bar{y}\times2950 = 989$$

بارهای گسترده روی تیرها

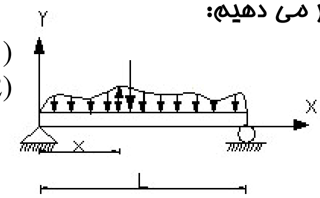
بارگسترده وارد بر تیر برحسب بیان میگرددولذابزرگی نیروی واردبریک جزء تیر به طول dx برابر است با

(1) (2) $Wdx = dA$



$W = \int_0^L Wdx \quad \Rightarrow W = \int dA = A \quad (1),(2)$

حال باید ببینیم که این بار متمرکز W به کجای تیروبرایندبارهای گستردهC وارد می گرددبرای بدست آوردن نقطه اثرP بارمعادل متمرکزWگشتاورW حول نقطه O را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی dw حول نقطهO قرار می دهیم:



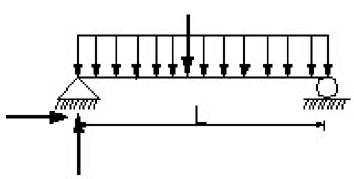
(1)
(2)

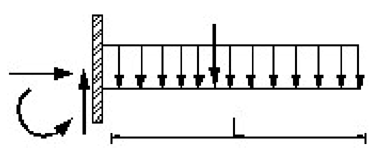
$$(\theta P)W = \int xdW$$
$$dW = Wdx = dA, W = A$$
$$\Rightarrow (OP)A = \int_0^L xdA \Rightarrow \bar{x}A = \int_0^L xdA$$
(1),(2)

بنا بر این به جای بار گسترده وارد بر تیر می شود یک بار متمرکز قرار داده،بزرگی این بار متمرکز برابر با سطح زیرمنحنی بار است وخط اثرش از مرکزی آن سطح عبور می کند

مثال:

مطلوب است محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیر های زیررا

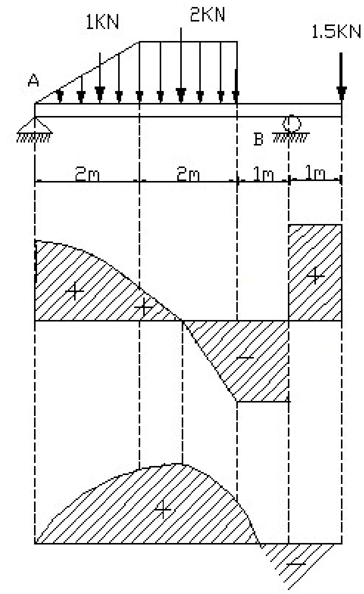




(1)
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow B_y \times L - WL \times L/2 = 0 \Rightarrow B_y = W\,L/2 \uparrow$$
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + W\,L/2 - WL = 0 \Rightarrow A_y = W\,L/2 \uparrow$$
$$+\downarrow cont \; +\sum M_B = 0 \Rightarrow W\,L/2 \times L - WL \times L/2 = 0 \qquad OK$$

---

(2)
$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow +16\times 2 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = 32N.M$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 16 = 0 \Rightarrow A_y = 16N.M$$
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0 \Rightarrow +\rightarrow cont = +\sum M_B = 0$$
$$\Rightarrow 32 - 16\times 4 + 16\times 2 = 0 \qquad OK$$



$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow -2\times3 - 1\times\frac{2}{3}\times2 - 1.5\times6 + B_y\times5 = 0$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 3.27 - 1 - 2 - 1.5 = 0 \Rightarrow A_y = 1.23KN$$

$$+\sum M_B = 0 \Rightarrow -1.23\times5 + 1\times4.33 + 2\times2 - 1.5\times1 = 0 \qquad OK$$

$$B_y = 3.27KN\uparrow$$

$$A_1 = 2\times1.233 - 1\times\frac{2}{3} = 1.799$$

Or

$$A_1 = 2\times0.233 + \frac{2}{3}\times1\times2 = 1.799$$

$$A_2 = 0.233\times\frac{0.233}{2} = 0.027$$

$$A_3 = -1.767\times\frac{1.767}{2} = -1.56$$

$$A_4 = -1.767\times1 = -1.767$$

$$A_5 = 1.5\times1 = 1.5$$

تحلیل سازه ها

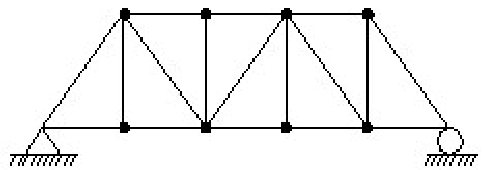
در فصول گذشته با تعادل یک جسم صلب تنها سروکار داشتیم ونقطه نیروهای خارجی واردبرجسم صلب رادربرمیگرفتندحالامی خواهیم مسئله های را در نظر به گیریم که با تعادل سازه های متشکل ازچند قسمت متصل سزوکار دارند.در این مسئله ها نه تنها باید نیروهای خارجی واردبر سازه را تعیین کردبلکه بایدنیروهای خارجی واردبرسازه راتعیین کرد بلکه باید نیروهایی را هم که قسمت های مختلف سازه را به هم متصل نگه میدارند به دست اورد.اگرکل سازه ها رادرنظربگیریم،این نیروهارانیروهای داخلی مینامند.

انواع سازه های مهندسی موردبررسی:

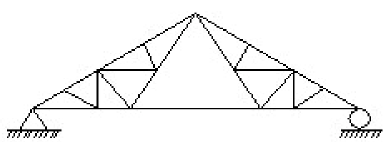
1) خرپاها 2) قابها 3) ماشینها

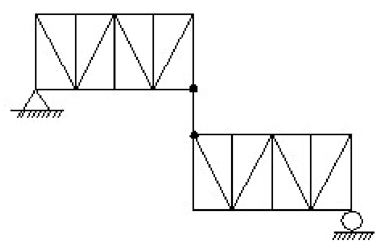
انواع خرپاها:

1) خرپاهای سازه:سازه هائی که از زیر مجموعه بنیادی مثلثی تشکیل شده اند مجموعه های مفصلی و یا خرپاهای ساده خوانده می شوند.

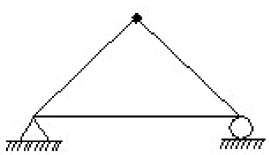


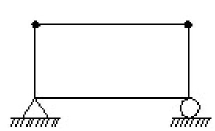
2) خرپاهای مرکب:از تشکیل یکسری خرپاهای ساده که به وسیله یکسری اعضاء به یکدیگر متصل گردیده اند.

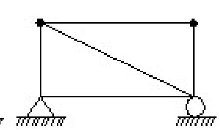




)خرپاهای مبهم(پیچیده):خرپاهائی که نه ساده می باشند و نه مرکب.







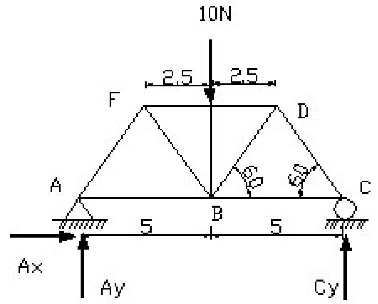
$M = 3$
$j = 3$
$R = 3$
$M + 3 < 2j$

$M = 4$
$j = 4$
$R = 3$
$M + 3 < 2j$
$4 + 3 < 8$

$8 = 8$

$M + R > 2j \Rightarrow n = (M + R) - \mathrm{L}j$
$\mathrm{M} + \mathrm{R} = 2\mathrm{j} \Rightarrow \mathrm{n} = 0$
$\mathrm{M} + \mathrm{R} < 2\mathrm{j} \Rightarrow \mathrm{n} < 0$

روش های آنالیز خرپاها:



1)روش مفصل(تعادل مفاصل):

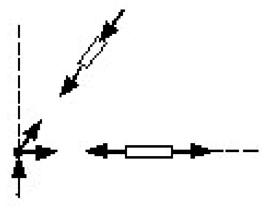
در میله های خرپا،در یک عضو یا نیروی کششی وجود دارد و یا نیروی فشاری به عبارت دیگر فقط یک نیروی محوری در امتداد میله وجود دارد و میله لنگر را تحمل نمی کند.

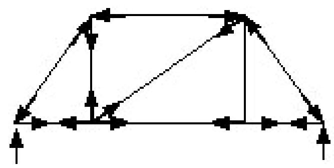
$$M=9, j=6, R=3 \Rightarrow M+3=2j \Rightarrow 9+3=12=2\times 6=12$$

معین داخلی و از لحاظ خارجی نیز معین است.

$$+\rightarrow \sum F_x=0 \Rightarrow A_x=0$$
$$+\sum M_A=0 \Rightarrow$$
$$-10\times 5+C_y\times 10=0 \Rightarrow C_y=5N\uparrow$$
$$+\uparrow \sum F_y=0 \Rightarrow$$
$$A_y+5-10=0 \Rightarrow A_y=5N\uparrow$$
$$cont:+\sum M_B=0 \Rightarrow$$
$$5\times 10-10\times 5=0$$

تعادل برقرار است





گره A:

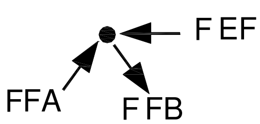
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{AF}\sin 60^o + 5 = 0 \Rightarrow F_{AF} = 5.77N$$ فشاری

$$+\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{AF}\cos 60^o + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 2.88N$$ کششی

گره F:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$5.77\sin 60^o - F_{FB}\sin 60^o = 0 \Rightarrow F_{FB} = 5.77N$$ کششی

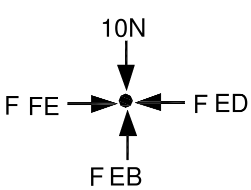
$$+\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{FA}\cos 60^o + F_{FB}\sin 60^o - F_{EF} = 0 \Rightarrow$$

$$2\times 5.77\times \sin 60^o - F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = 10N$$ فشاری

گره E:

فشاری



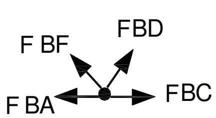
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{EB} - 10 = 0 \Rightarrow F_{EB} = 10N$$ فشاری

گره B:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{ED} + F_{FE} = 0 \Rightarrow -F_{ED} + 10 = 0 \Rightarrow F_{ED} = 10N$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$ کششی

$$F_{BF}\sin 60^o + F_{BD}\sin 60^o - F_{BE} = 0 \Rightarrow$$

$$5.77\times 0.87 + F_{BD}\times 0.87 - 10 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 5.77N$$

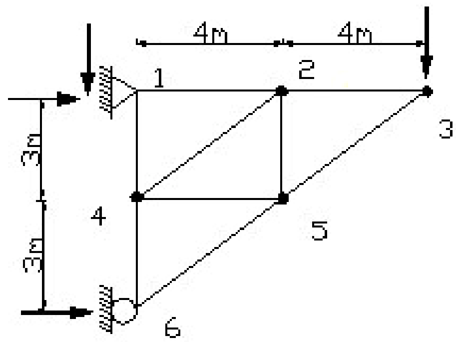
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{BF}\cos 60^o + F_{BD}\cos 60^o + F_{BC} - F_{BA} = 0 \Rightarrow$$ کششی

$$-5.77\cos 60^o + 5.77\cos 60^o + F_{BC} - 2.88 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BC} = 2.88N$$

مثال:



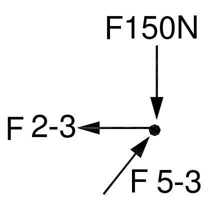
گره3:

عکس العمل ها:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

فشاری

$$F_{(5-3)} \times \frac{3}{5} - 150 = 0 \Rightarrow F_{(5-3)} = 250N$$



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

کششی

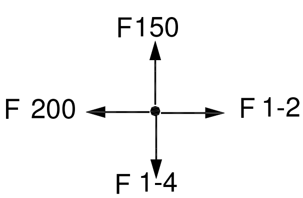
$$F_{(5-3)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-3)} = 200N$$

گره 1:

کششی

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(1-2)} - 200 = 0 \Rightarrow F_{(1-2)} = 200N$$



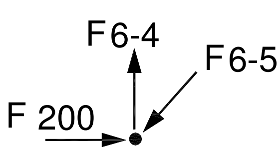
کششی

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(1-4)} + 150 = 0 \Rightarrow F_{(1-4)} = 150N$$

گره6:

فشاری



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

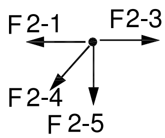
$$-F_{(6-5)} \times \frac{4}{5} + 200 = 0 \Rightarrow F_{(6-5)} = 250N$$

کششی

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(6-5)} \times \frac{3}{5} + F_{(6-5)} = 0 \Rightarrow F_{(6-5)} = 150N$$

گره2:



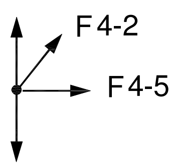
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(2-4)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-1)} + F_{(2+3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-4)} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(2-5)} = 0 \Rightarrow F_{(2-5)} = 0$$

گره4:



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{(4-5)} = 0$$